

CO JEST W PRZESTRZENI?



Wzorcowy materiał szkoleniowy w zakresie innowacyjnych rozwiązań organizacyjno-dydaktycznych dla nauczycieli i studentów studiów pedagogicznych

Edukacja matematyczna w klasach IV-VIII szkoły podstawowej

Anna Makarewicz, Anna Tatarczak

Autorki:

Anna Makarewicz, Anna Tatarczak

Recenzentka:

Ewa Ludwikowska

Wydawca:

Euro Innowacje sp. z o.o.

Publikacja została opracowana w ramach projektu pt. „Szkoła Ćwiczeń w Gminie Rawicz”, realizowanego w partnerstwie przez Gminę Rawicz (Beneficjent projektu) oraz Euro Innowacje sp. z o.o. (Partner projektu).

Projekt jest finansowany ze środków budżetu państwa oraz Unii Europejskiej, w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój (PO WER), II Osi Priorytetowej „Efektywne polityki publiczne dla rynku pracy, gospodarki i edukacji”, Działania 2.10 „Wysokiej jakości system oświaty”.

Publikacja jest udostępniona na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Uznanie autorstwa 3.0 Polska (CC BY 3.0 PL)



Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój



**Rzeczpospolita
Polska**

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny



SPIS TREŚCI

WSTĘP	4
CEL PUBLIKACJI	7
1. Lekcja przestrzeni	8
2. Wyobrażenia przestrzenna	13
3. Wskazówki dla nauczyciela	20
4. Przestrzeń	23
5. Pole powierzchni	28
6. Objętość.....	31
7. Obliczenia praktyczne	35
8. Układanie i rozwiązywanie zadań z treścią	39
PODSUMOWANIE	45
BIBLIOGRAFIA	46
NETOGRAFIA.....	49
SPIS ILUSTRACJI.....	51



WSTĘP

W publikacji zostanie opisana nowoczesna wizualizacja przestrzeni i znajdujących się w niej przedmiotów w tym brył, wykorzystamy w tym celu najbardziej aktualne programy komputerowe. Innowacyjne zastosowanie przestrzennych rysunków i instrukcje ich wykorzystania w zadaniach, aby obliczenia były prostsze, bardziej pobudzą wyobraźnię. Omówione zostaną również interesujące przykłady i różne modele rozwiązań. Ponadto publikacja będzie zawierała cenne wskazówki dotyczące zapamiętywania i rozwiązywania zadań z wykorzystaniem geometrii przestrzennej a wszystko to w przyjazny sposób będzie stymulowało do dalszego pogłębiania wiedzy. Ta publikacja, to pogładowe i intuicyjne podejście do geometrii również dla uczniów z różnymi trudnościami.

Nauczanie przez rozwijanie myślenia abstrakcyjnego może być wykorzystane na każdym etapie nauczania przygotowywanych zajęć nie tylko przez nauczyciela ale jest także zachętą do samodzielnego innowatorskiego ćwiczenia matematyki.

W klasach IV-VI, kiedy nauka matematyki odbywa się przede wszystkim na konkretnych obiektach, należy przede wszystkim zadbać o pracę na przykładach, bez wprowadzania nadmiaru pojęć abstrakcyjnych, dużą pomocą dla ucznia jest możliwość eksperymentowania z liczbami, rozwiązywania zagadek logicznych i logiczno-matematycznych, a także ćwiczenia polegające na pracy lub zabawie z różnymi figurami lub bryłami w geometrii [Podstawa programowa].

W szczególności, rozwiązywanie równań przez zgadywanie powinno być w klasach IV-VI traktowane jako poprawna metoda, w klasach IV-VI zaleca się szczególną ostrożność przy wymaganiu od ucznia ścisłości języka matematycznego [Podstawa programowa]. Należy dbać o precyzję wypowiedzi, ale trzeba pamiętać o tym, aby unikać sytuacji, w której uczeń zostaje uznany za nieuzdolnionego matematycznie, gdy nie potrafi wyrazić poprawnego rozwiązania w sposób odpowiednio formalny, zgodnie z oczekiwaniami nauczyciela [Podstawa programowa]. Umiejętność posługiwania się takimi



pojęciami matematycznymi jak: kąt, długość, pole, suma algebraiczna jest o wiele bardziej istotna niż zapamiętanie formalnej definicji, w nauczaniu matematyki istotne jest, aby uczeń zrozumiał sens reguł formalnych [Podstawa programowa].

Celem nauczania matematyki jest wyrobienie u uczniów intuicji matematycznych właściwych danemu wiekowi. Jednym z zadań w procesie kształcenia ucznia jest rozwinięcie umiejętności wnioskowania, zdolności analitycznych, myślenia strategicznego (a więc umiejętności planowania kolejnych kroków postępowania w celu rozwiązania problemu, a także dzielenia procesu rozwiązywania złożonego problemu na etapy) oraz umiejętności krytycznego spojrzenia na rozwiązanie zadania. Drugim z głównych celów jest rozwinięcie umiejętności rachunkowej na poziomie umożliwiającym rozwiązywanie problemów z zakresu innych przedmiotów w klasach IV–VIII. Powyższe cele, sprecyzowane są w podstawie programowej jako cele ogólne.

Pracując z dziećmi ze SPE (specjalne potrzeby edukacyjne), należy (według Marzeny Kędry – autorki wielu scenariuszy lekcji): wspierać ucznia, naprowadzać go na trop prawidłowego rozwiązania, zadawać pytania pomocnicze, dostosować ilość czasu potrzebnego do wykonania zadania do tempa pracy ucznia, oceniając ucznia, nauczyciel powinien zwrócić uwagę na nagradzanie najmniejszych sukcesów, stosować zasady stopniowania trudności w celu umożliwienia mu uzyskania pozytywnej oceny, nagradzać należy nie tylko za efekty pracy, ale również za włożony wysiłek.

Opisując konstruktywistyczne podejście do procesu nauczania – uczenia się zawsze podkreśla się, że zaangażowanie i aktywność ucznia są kluczowymi założeniami w planowaniu i realizacji zajęć szkolnych, uczeń powinien być świadomy swojego procesu uczenia się, być odpowiedzialny za to, co robi, umieć uczyć się i rozumieć swój wkład w kształtowanie własnego sukcesu w szkole, w procesie konstruowania swojej wiedzy i dochodzenia do zrozumienia uczeń wykorzystuje wiedzę zdobytą w codziennych życiowych doświadczeniach



i w szkole [Pfeiffer, 2017]. Przygotowując zajęcia, w trakcie których uczeń poznaje nowe pojęcia, symbole czy procedury, nauczyciel powinien odwoływać się do tych dwóch obszarów doświadczeń, niezwykle ważny jest fakt, że uczenie się ma charakter społeczny – jest procesem interakcji ucznia ze światem, z innymi ludźmi i z samym sobą [ibidem]. Konstrukttywizm jest obecnie najbardziej znaczącym nurtem w edukacji, określa na nowo relacje między nauczycielem i uczniem, stawia na aktywnego ucznia, świadomego tego, czego i po co się uczy, oraz nauczyciela organizującego mu środowisko uczenia się sobą [ibidem].



CEL PUBLIKACJI

Celem publikacji jest opracowanie wzorcowych materiałów szkoleniowych wspierających nauczycieli realizujących nauczanie w szkole, rozwijanie kompetencji kluczowych na lekcjach i zajęciach dodatkowych. Publikacja będzie zawierała zestaw wybranych wzorów matematycznych wraz z ich praktycznym i teoretycznym zastosowaniem. Nowatorskie sposoby ukazujące zastosowanie matematyki w praktyce bardzo wzbogacą publikację.

Publikacja będzie zawierała zestaw wybranych wzorów matematycznych wraz z autorskimi rysunkami. Nowatorskie sposoby na zastosowanie figur przestrzennych w obliczeniach praktycznych będą bardzo pomocne w rozwiązywaniu zadań z treścią. Zadania – przygotowane przez autorki będą przeznaczone do rozwiązania w grupach, parach lub indywidualnie.

Ponadto pewna powtarzalność w tej publikacji jest czynnikiem wspierającym uczenie się uczniów z trudnościami. Publikacja ta to innowacyjny akcent na rozwijanie myślenia matematycznego, odpowiada uczniom ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Wszystkie elementy publikacji, począwszy od struktury przez typ zadań, ich nowoczesny charakter, a także podejście metodyczne, zostały dobrane tak, by uwzględniały trudności uczniów i pomagały w ich przezwyciężeniu i bardziej pobudzały wyobraźnię.



1. Lekcja przestrzeni

Żyjemy w przestrzeni i od urodzenia uczymy się, jak ją rozumieć, poznawanie przestrzeni zaczynamy od świadomości własnego ciała, czyli od własnego „ja” (imię, wygląd, nazwy części ciała), następnie dziecko zaczyna patrzeć na otoczenie ze swojego punktu widzenia, powoli zauważa, że coś znajduje się przed nim, za nim, z boku itd. [Zubowicz]. Kolejnym krokiem w rozwoju jest kształtowanie się zdolności widzenia świata oczami innej osoby, ten etap nie jest łatwy i wymaga już wysiłku intelektualnego (rozumienie pojęcia przesunięcia i obrotu) [ibidem].

Z chwilą pójścia do szkoły, dzieciom potrzebna jest jeszcze jedna umiejętność – orientacja na kartce papieru, co jest konieczne w procesie nauki czytania i pisania, a później podczas uczenia się matematyki, fizyki, geografii, nabywanie tej umiejętności nie jest łatwe [ibidem]. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska [Gruszczyk-Kolczyńska, 2018] uważa, że dzieci rozpoczynające naukę w szkole, powinny dysponować umiejętnością patrzenia na otoczenie oczami drugiej osoby i orientowania się na kartce papieru, w przeciwnym razie, nie będą rozumiały poleceń nauczycieli [ibidem]. Zdaniem prof. Gruszczyk-Kolczyńskiej, dziecko poznaje przestrzeń w działaniu, poprzez własny ruch – obserwuje, czuje i nazywa swoje doświadczenia, dlatego powinniśmy aranżować dla niego sytuacje poznawcze, zabawy i zadania do wykonania [ibidem]. Dla uczniów mających problemy z orientacją na kartce papieru proponuję zrobić następujące ćwiczenia, które mogą być kartą pracy zadaną jako praca domowa, zabawy – ćwiczenia w niej zawarte uczniowie mogą wykonywać z rodzicami lub rodzeństwem.



Ćwiczenia z kartką [Załęska]:

- 1) Najpierw kartka przypięta jest na ścianie, określamy jej brzegi: górny, dolny, lewy, prawy; potem te same ćwiczenia z kartką położoną na stole.
- 2) Rogi górne i dolne na kartce – pokazywanie i rysowanie: od góry na dół, z dołu do góry, z lewego brzegu do prawego, z prawego do lewego; łączenie rogów: lewy górny i prawy dolny, lewy dolny i prawy górny.
- 3) Kreślenie greckich wzorów – dorosły zaznacza uczniowi kropką miejsce na kartce od którego zaczynać się będzie rysowanie szlaczka, wzoru, potem mówi w którą stronę dziecko ma rysować (każda kreska ma długość kratki), np. jedna kratka w górę, jedna w prawo, jedna w dół, jedna w prawo, jedna w górę itd., potem uczeń może już sam dokończyć szlaczek.
- 4) Rysowanie labiryntów (dorosły najpierw dyktuje co najmniej trzy sekwencje wzoru, potem dziecko rysuje samo).

Polecamy, też inne bardzo interesujące ćwiczenia (takie jak zabawa z klockami m.in., budowanie domu czy węża), które można znaleźć na stronie [Orientacja przestrzenna – ćwiczenia](#).

Innowacyjne pomoce dydaktyczne

W obecnych czasach technologie informatyczne obecne są w każdej dziedzinie życia człowieka. Od najmłodszych lat dzieci posługują się telefonem czy tabletem. Zauważmy, że te dzieci nie czytają instrukcji obsługi tych urządzeń i się jej nie uczą, one po prostu się nimi bawią, gdyż obsługa urządzeń jest po prostu intuicyjna. Zatem najlepszym sposobem do zmotywowania uczniów do systematycznej nauki matematyki, tak aby nie powstawały zaległości ani niedobory w nauce jest umieszczanie matematyki w przystępnych i odpowiednich sytuacjach, które dzieci mogą rozpoznać i które są im znajome, w ten sposób można sprawić, że wszystkie działy matematyki będą jasne, a także zabawne i wciągające. Sprowadzenie matematyki do zabawy, tzn. do nauki poprzez zabawę, jest najważniejszym elementem zmiany poglądów



uczniów. Pokazując im, że matematyka nie jest przykrym obowiązkiem i że może być naprawdę wszechstronna i ekscytująca, wzbudzimy ich zainteresowanie i pewność siebie. Oczywiście każdy uczeń jest inny i powinien być traktowany indywidualnie. Ważne jest, aby zwrócić uwagę na to, w jaki sposób uczeń przyswaja informacje, w jaki sposób rozumie wyzwania i podchodzi do nich. Może pomocne okazać się odpowiednio dobrane zadania – zabawy, może zadania, które angażują wiele zmysłów jednocześnie (integracja sensoryczna), może zadania z wykorzystaniem programów komputerowych i różnego rodzaju nowatorskich wizualizacji. To wszystko sprawi, że nauka matematyki będzie przyjemniejsza.

Innowacyjni nauczyciele, to taki, który uatrakcyjni lekcje matematyki korzystając z programów komputerowych, czy tablic multimedialnych, będzie to bardzo pożądane szczególnie w geometrii zarówno płaskiej, jak i przestrzennej. Uczniowie są bardzo otwarci na różne nowinki techniczne i można oczekiwać, że wizualizacje różnych problemów geometrycznych zwłaszcza przestrzennych byłyby dla nich ciekawym urozmaicheniem lekcji matematyki [Falkiewicz i inn., 2018, str. 89]. Owocem takich działań byłyby lepsze efekty przyswajania wiedzy przez uczniów, można by wtedy pomyśleć o tym, aby choć jedna godzina matematyki w tygodniu była przeprowadzana w laboratorium komputerowym, w ten sposób można byłoby pokazać uczniom związek matematyki z informatyką [ibidem]. Mogliby oni poszerzać swoją wiedzę przez zabawę, poznawanie programów komputerowych służących obliczeniom matematycznym i wreszcie pobudzać własną kreatywność, umiejętność logicznego myślenia i wyobraźnię przestrzenną, dlatego warto już od najmłodszych lat pokazywać dzieciom, że matematyka jest wszędzie i jej nauczanie nie musi polegać jedynie na rozwiązywaniu zadań przy tablicy [ibidem].

Możemy zatem zaproponować uczniom nowatorską lekcję matematyki z wykorzystaniem programowania np. w GeoGebra. Tym bardziej, że wśród uczniów widoczne jest duże zainteresowanie komputerami, na których mogliby



samodzielnie tworzyć proste figury przestrzenne, eksperymenty, konsekwencją czego będzie zdobyta i znacznie bardziej utrwalona wiedza. Dzięki takim nieszablonowym lekcjom uczniowie lepiej zapamiętują nowopoznane pojęcia i stosują je w praktyce, mogą oni również rozwijać swoje pasje i zainteresowania z jednoczesnym kształtowaniem licznych umiejętności przedmiotowych. Program GeoGebra jest darmowy i bardzo prosty w obsłudze, każdy uczeń może go sobie zainstalować na własnym domowym komputerze. GeoGebra jest narzędziem pozwalającym uczniowi: „zobaczyć” (np. różnego rodzaju odcinki zawarte w figurach przestrzennych takich jak prostopadłościanny, sześcianny, graniastosłupy czy ostrosłupy a także ich wysokości i ich spodki), lepiej rozumieć zależności między zaobserwowanymi odcinkami a także miary kątów. Innowacyjne lekcje z matematycznego programowania (obsługa programu GeoGebra), prowadzenie obserwacji dynamicznych oraz ćwiczeń dostępnych na stronie [GoeGebra](#), tworzenie min. konstrukcji przestrzennych sprawiają, że uczniowie mają możliwość eksperymentowania z figurami przestrzennymi, sami odkrywają zależności, własności i cechy figur przestrzennych jak również twierdzeń matematycznych z zakresu geometrii, zdobywają też umiejętność konstruowania obiektów geometrycznych, pogłębiają umiejętność wykonywania konstrukcji geometrycznych. Na stronie GeoGebry są gotowe aplikacje i prezentacje przygotowane dla uczniów w każdym wieku, które nauczyciel może pokazać nawet bez instalowania programu GeoGebra i bez uprzedniego zaznajomienia się z tym programem. Dla zainteresowanych tym programem polecić można podręczniki, które umieszczone są na stronach:

- a) [Wprowadzenie do GeoGebry – wersja 4.2](#);
- b) [Materiały metodyczne "matematyka"](#) – Pawlak R.J., Walczak Z., Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Proponujemy, też wykorzystanie na lekcjach różnego rodzaju układanek geometrycznych czy klocków przestrzennych, to świetny sposób na ćwiczenie myślenia matematyczno-przestrzennego. Klocki, gry i układanki rozwijają również



wyobraźnię i umiejętności koncentracji. Ich umiejętne zastosowanie podczas lekcji jest bezsprzecznie nowatorską metodą dydaktyczną. Bardzo polecamy stronę [matzoo](https://matzoo.pl), uczeń może na niej wybrać klasę do której aktualnie uczęszcza oraz dział, który chciałby powtórzyć. Pojawią się wtedy różne zadania, które uczeń powinien rozwiązać, następnie uczeń może sprawdzić swoje rozwiązanie, jeśli jest poprawne to przechodzimy do nowego zadania, jeśli nie to pojawia się wskazówka i odpowiedź, można wtedy spróbować jeszcze raz lub przejść do kolejnego zadania. Dział geometria przestrzenna zawiera zadania z następujących podrozdziałów:

- prostopadłościany – krawędzie, pola powierzchni, objętości;
- pole powierzchni graniastosłupa;
- objętość graniastosłupa;
- przekątna sześcianu;
- pole powierzchni ostrosłupa;
- objętość ostrosłupa;
- zastosowanie Twierdzenia Pitagorasa do obliczania pól powierzchni graniastosłupów;
- jednostki objętości (l, ml, cm^3 , ...).



2. Wyobraźnia przestrzenna

Pojęcie wyobraźni przestrzennej nie jest jednoznaczne, definiuje się ją rozmaicie, w literaturze z zakresu psychologii i pedagogiki przedstawia się ją inaczej, niż w przypadku sztuk plastycznych, skrajnie różnie w przypadku nauk ścisłych [Guzy, 2011]. Nie znajdziemy tego terminu w słownikach języka polskiego, nawet najbardziej obszerny Praktyczny słownik współczesnej polszczyzny pod redakcją Haliny Zgółkowej pod hasłem wyobraźnia nie notuje połączenia typu wyobraźnia przestrzenna, choć uwzględnia ponad 50 popularnych połączeń, tj.: wyobraźnia dziecka, wyobraźnia artystyczna, itp. [ibidem]. Słownik psychologiczny podaje: „wyobraźnia przestrzenna, to sprawność wyobrażania sobie układów przestrzennych oraz operowania przestrzennego nimi, bez spostrzegania zależności od rodzaju materiału przestrzennego (twory geometryczne, konstrukcje techniczne, konstelacje gwiazdne, pokłady geologiczne); wyobraźnia przestrzenna będzie przybierała postać swoistą dla każdego materiału”. Zagadnienie orientacji przestrzennej w literaturze przedmiotu z zakresu psychologii, pedagogiki oraz dydaktyki nie jest jednoznacznie opisane, nie do końca też wiadomo, w jaki sposób dziecko poznaje przestrzeń [ibidem]. Badacze twierdzą, że wiemy tylko, że różne są drogi i sposoby uczenia się i że istnieją pewne prawidłowości, według których wiedza o przestrzeni kształtuje się w umyśle dziecka oraz, że orientować się w przestrzeni to znaczy znać kierunki: lewa – prawa, góra – dół, przód – tył [ibidem].

Bez wątpienia jednak wyobraźnia przestrzenna jest jedną z ważniejszych dyspozycji intelektualnych człowieka, podobnie jak wiele innych dyspozycji psychologicznych człowieka ulega rozwojowi, rozwój ten może przebiegać w sposób naturalny /spontaniczny/ będąc zależnym od ogólnego rozwoju człowieka i wpływu szeregu czynników zewnętrznych [Kopeć, 1989, str. 38]. Wyobraźnię przestrzenną można również świadomie/celowo kształtować w toku nauki szkolnej, przede wszystkim w czasie realizacji programu nauczania



obejmującego zagadnienia nauki o rzutach, rysunku i geometrii , w szczególności stereometria kształtuje a tym samym rozwija wyobraźnię przestrzenną, podstawowe umiejętności, które powinny być kształtowane w szkole podstawowej i kontynuowane w szkołach ponadpodstawowych to:

- umiejętność rysowania odręcznego przy pomocy różnych przyrządów;
- umiejętność wykonywania rysunku, którego podstawą jest zapis graficzny utworu przestrzennego w rzutach prostokątnych;
- umiejętność czytania rysunku w której zasadniczą rolę odgrywa odtwarzanie kształtu i położenia w przestrzeni trójwymiarowej utworów na podstawie ich dwuwymiarowego płaskiego zapisu graficznego w rzutach prostokątnych [ibidem].

Z przeprowadzonych badań wynika, że poddając wyobraźnię przestrzenną uczniów w wieku 13. i 17. lat nawet intensywnemu kształtowaniu, należy spodziewać się niewielkich osiągnięć. Znacznie lepsze wyniki w kształtowaniu wyobraźni przestrzennej można osiągnąć u uczniów w wieku 10.,11. lat lub 15. lat [ibidem].

Orientacja w przestrzeni jest warunkiem dobrego funkcjonowania ucznia w otaczającej rzeczywistości i stanowi bardzo ważny element w edukacji, a więc powinna być kształcona nie tylko w szkole ale i przed rozpoczęciem systematycznej nauki [Zynek]. Zachęcamy do stosowania nowatorskiej metody uczenia matematyki jaką jest „Matematyka Multisensoryczna”, pojęcie to obejmuje wiedzę z zakresu stymulacji zmysłów, objawów problemów przetwarzania sensorycznego, wpływu ruchu na pracę mózgu, potrzeby ruchu u dzieci przedszkolnych i szkolnych oraz rozwijania kompetencji matematycznych zawartych w podstawie programowej szkoły podstawowej. Matematyka Multisensoryczna jest innowacyjnym narzędziem do realizacji podstawy programowej w szkole z zakresu matematyki i logiki zgodnie z założeniami integracji sensorycznej. Gdy zajęcia oparte są na zabawie, doświadczaniu wielozmysłowemu, to dają możliwość manipulowania przedmiotami z zakresu



przerabianego materiału. Uczeń ma możliwość wziąć do ręki „konkret, np. sześcian z życia codziennego” i zbadać go wielozmysłowo: od dotknięcia, po podrzucenie w celu zbadania wagi, powąchania a nawet przytulenia, jeśli „konkret” ma właściwości np. termiczne [Skura, i inn., Przepis na sukces pedagogiczny, 2008, str. 27-29]. Zabawy i ćwiczenia związane z percepcją wzrokową, oraz narzędziami do rozwijania percepcji wzrokowej są bardzo ważne w rozwoju ucznia i w racjonalizatorskim oraz przyjemnym uczeniu matematyki. Zabawy z tych obszarów są kluczowe w procesie logicznego myślenia, rozwijają spostrzegawczość, wspomagają koncentrację, koordynację wzrokowo-ruchową oraz kreatywność ucznia. Percepcja wzrokowa to umiejętność spostrzegania barw, kształtów, skupiania wzroku, wyodrębnianie elementów z tła. To zdolność do rozpoznawania i różnicowania bodźców wzrokowych oraz do ich interpretowania w odniesieniu do wcześniej nabytych doświadczeń. Zdolność postrzegania wzrokowego bierze udział we wszystkich działaniach człowieka. Stymulacja percepcji wzrokowej jest zatem kluczowa w rozwoju ucznia [Skura, i inn., Myślenie matematyczne, 2014, str.23.]. Pod kątem rozwijania różnych kompetencji percepcję wzrokową można stymulować za pomocą zabaw z zakresu odwzorowywania, spostrzegania, układania i rysowania prostych sekwencji i symetrii oraz przyporządkowywania. Niezmiernie ważnym ćwiczeniem na lekcji może być sytuowanie przedmiotów w różnych miejscach przestrzeni (na płaszczyźnie dwuwymiarowej: tablica, zeszyt, książka) lub w przestrzeni trójwymiarowej (sala w której odbywają się lekcje) i przestrzeni niewymiarowej (otwarta przestrzeń) [ibidem]. W ten sposób uczeń utrwala stosunki przestrzenne między przedmiotami i ich wzajemne położenie niezależne od swojej osoby, co jest niezbędne przy rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej. Stopniując trudność możemy się posłużyć w zabawach układankami, mozaikami, klockami itp.

Przykładowymi zadaniami mogą być:

- wyszukiwanie układów podobnych do wskazanych przez nauczyciela;



- segregowanie wg zasad opartych na ujmowaniu stosunków przestrzennych;
- wzajemne sytuowanie przedmiotów względem siebie;
- układanie wzorów (powtarzających się sekwencji), kolorowanie rysunków lub rysowanie wg wskazówek lub według wcześniej ustalonego kodu;
- układanie i konstruowanie;
- składanki geometryczne;
- rysowanie lub kolorowanie wg instrukcji słownej (w lewo, w prawo, do góry itp.) na kartce kratkowanej lub punktowanej (w ten sposób uczniowie utrwalą pojęcie układu współrzędnych);
- graficzne odtwarzanie wzajemnego położenia elementów wg wzoru (szlaczki, figury geometryczne, układy figur geometrycznych) [ibidem].

W ten sposób uczeń w innowacyjny sposób bardzo kreatywnie stymuluje wyobraźnię przestrzenną a także ćwiczy pamięć i logiczne myślenie.

Uzdolnieni uczniowie

Wyróżniamy kilka rodzajów inteligencji m.in. inteligencja językowa, inteligencja muzyczna, inteligencja logiczno-matematyczna, inteligencja wizualno-przestrzenna, inteligencja kinestetyczna, inteligencja interpersonalna, inteligencja intrapersonalna, inteligencja przyrodnicza. Inteligencja matematyczno-logiczna pozwala odbierać świat poprzez liczby i ciągi zdarzeń, charakterystyczne jest zainteresowanie światem przedmiotów, symboli liczbowych i operacji matematycznych [Poleszak, i inn., 2014, str. 119]. Inteligencja matematyczno-logiczna przejawia się również w logicznym myśleniu, rozumieniu abstrakcyjnych relacji i dostrzeganiu związków przyczynowo-skutkowych oraz w sprawnym wykonywaniu różnego rodzaju obliczeń, osoby z dominującą inteligencją matematyczno-logiczną charakteryzuje to, że:

- potrafią logicznie myśleć;
- umiejętnie szeregują, klasyfikują i wnioskują;



- lubią precyzyjne instrukcje;
- są konkretne i dociekliwe;
- łatwo dostrzegają związki przyczynowo-skutkowe;
- chętnie rozwiązują problemy;
- lubią przeliczać różne rzeczy (czasem robią to bezwiednie);
- mają ustalony porządek i kolejność rzeczy;
- umiejętnie zbierają i analizują informacje;
- prowadzą badania;
- rozumieją znaczenie symboli;
- są zorganizowane, dokładne i precyzyjne;
- grają w gry logiczne i strategiczne;
- lubią zagadki i łamigłówki;
- zadają dociekliwe pytania;
- potrafią grupować i klasyfikować [ibidem].

Inteligencja wizualno-przestrzenna pozwala odtwarzać wrażenia wzrokowe, odbierać świat poprzez obraz i formy przestrzenne, charakterystyczna jest zdolność do tworzenia w umyśle trójwymiarowych obrazów, relacji przestrzennych oraz wizualizacji, inteligencja wizualno-przestrzenna przejawia się zdolnością do spostrzegania informacji wzrokowych oraz przestrzennych, do przekształcania i modyfikowania ich, osoby z dominującą inteligencją wizualno-przestrzenną charakteryzuje to, że:

- mają zdolność dostrzegania szczegółów w otaczającym świecie;
- są wrażliwe na kształty, wzory, linie i kolory;
- mają pamięć obrazów, „myślą obrazami”;
- lubią rysować, malować, modelować, rzeźbić i lepić;
- chętnie tworzą różnorodne formy przestrzenne;
- mają dobrze rozwinięty zmysł dotyku;
- bez trudu korzystają z map, diagramów, tabel czy wykresów;
- tworzą i rozumieją schematy rysunkowe;



- lubią różne układanki typu puzzle, klocki;
- tworzą w wyobraźni własne wizje dotyczące czytanej książki;
- lubią sprawdzać, jak coś działa, z czego się składa;
- tworzą modele;
- potrafią odnaleźć drogę w nieznanym miejscu, w labiryncie [ibidem].

Wybrane aktywności sprzyjające rozwijaniu wielorakich inteligencji uczniów, a szczególnie inteligencji wizualno-przestrzennej:

- konstruowanie zamków, domów, mostów, innych budowli;
- tworzenie kompozycji przestrzennych do muzyki;
- poszukiwanie schowanego przedmiotu przy pomocy planu, mapy;
- budowanie labiryntów, poszukiwanie skarbów, zabawy w „chowanego”;
- rysowanie map, labiryntów, planów;
- odczytywanie prostych instrukcji i schematów;
- konstruowanie gier;
- rzeźbienie, modelowanie, lepienie;
- tworzenie prac przestrzennych;
- wykonywanie elementów scenografii i dekoracji;
- wykonywanie rekwizytów teatralnych;
- filmowanie, fotografowanie, tworzenie prezentacji;
- wykonywanie prac według własnych pomysłów i projektów;
- wykonywanie makiet;
- sklejanie modeli;
- udział w spotkaniach z ciekawymi ludźmi: rzeźbiarzem, malarzem, modelarzem, architektem, filmowcem, astronomem, grafikiem komputerowym, inżynierem, pilotem [Poleszak, i inn., 2014, str. 127].



Wybrane aktywności sprzyjające rozwijaniu wielorakich inteligencji uczniów, a szczególnie inteligencji matematyczno-logicznej:

- tworzenie zbiorów, przeliczanie elementów, porównywanie liczebności zbiorów;
- segregowanie, przyporządkowywanie, porównywanie;
- przeliczanie, segregowanie, sortowanie liczmanów, klocków oraz innych przedmiotów;
- porównywanie, szacowanie, ocena wielkości przedmiotów;
- tworzenie zbiorów, podzbiorów, części wspólnej zbioru;
- układanie zapisu matematycznego;
- rozwiązywanie zadań z treścią, układanie pytań, odpowiedzi, treści zadań;
- dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie;
- mierzenie, ważenie przedmiotów, poznanie urządzeń oraz przyrządów służących do praktycznych pomiarów, poznanie różnych miar długości, ciężaru;
- dolewanie, odlewanie, poznanie różnych miar pojemności i objętości;
- mierzenie temperatury, odczytywanie wskazań termometrów, poznanie różnych rodzajów termometrów i sposobów ich wykorzystania;
- rozpoznawanie i nazywanie kształtów;
- konstruowanie gier;
- korzystanie z gier planszowych;
- udział w spotkaniach z ciekawymi ludźmi: matematykiem, księgowym, inżynierem, technikiem, informatykiem, wynalazcą, chemikiem, fizykiem;
- wizyty w laboratorium badawczym, obserwatorium astronomicznym, w instytucie technicznym, na wyższej uczelni technicznej, w biurze rachunkowym [Poleszak, i inn., 2014, str. 128].



3. Wskazówki dla nauczyciela

Wprowadzanie nowego materiału na lekcji jakim są figury przestrzenne moglibyśmy zacząć od filmu pt. „[Figury przestrzenne – wprowadzenie](#)” aby zapoznać uczniów z ich kształtem, charakterystyką oraz pokazać, że zetknęli się już z nimi w życiu codziennym. Aby jeszcze bardziej ulokować matematykę przestrzenną w życiu każdego ucznia, nauczyciel może poprosić aby każdy znalazł konkretną bryłę znajdującą się w sali (np. prostopadłościan), opisał ją, pokazał i policzył krawędzie podstawy, krawędzie boczne, wierzchołki itd., a następnie aby podał z jakiej rzeczy (w kształcie dowolnej bryły przestrzennej) korzysta najczęściej np. w domu. W ćwiczeniu wyobraźni przestrzennej wszystkim uczniom proponujemy grę Ubongo 3D. W grze są przestrzenne klocki, które wprowadzają zabawę w zupełnie nowy (trzeci) wymiar. Uczniowie dostają plansze z narysowanymi bryłami, ich zadaniem jest jak najszybciej wypełnić puste pola na swoich planszach, tylko tym razem muszą to zrobić w przestrzeni a nie na planszy. Ciekawymi ćwiczeniami dla uczniów będą:

Ćwiczenie 1.

Jakie bryły widzisz po drodze do szkoły, w swoim piórniku, w sklepie, Zrób zdjęcia kilku takich brył. Postaraj się, aby na każdym zdjęciu przedstawiona była inna bryła. Postaraj się zrobić zdjęcie każdej z poznanych na lekcjach brył. Jeśli nie możesz zrobić zdjęcia to poszukaj figur w Internecie. Następnie zrób prezentację w programie Power Point na temat brył, które możesz zaobserwować na co dzień.

Jeśli chcemy zapoznać uczniów z konkretnymi bryłami i ich cechami charakterystycznymi to następujące filmy, które o wiele bardziej rozwiną wyobraźnię ucznia niż zwykłe rysowanie na tablicy czy studiowanie podręcznika, będą pomocne:



- „[Budowa prostopadłościanu i sześcianu](#)”;
- „[Siatka prostopadłościanu i sześcianu](#)”;
- „[Pole powierzchni prostopadłościanu i sześcianu](#)”;
- „[Objętość i jednostki objętości – wprowadzenie](#)”;
- „[Objętość prostopadłościanu i sześcianu](#)”;
- „[Rozpoznawanie figur przestrzennych](#)”.

Aby wyjaśnić pojęcie ostrosłupa polecamy obejrzenie filmu pt. „[Rodzaje ostrosłupów](#)”. Uczeń odbiera w ten sposób wiedzę różnymi zmysłami. Następnie przejdziemy do wprowadzenia pojęcia objętości różnych ostrosłupów i rozwiązania przykładowych zadań podanych w filmie pt. „[Objętość ostrosłupa](#)”, dzięki dopracowanym animacjom pokazanym w tym filmie uczniowie szybko przyswoją to pojęcie, kolejnym materiałem będzie „[Rysowanie ostrosłupów](#)”, które sprawia uczniom wiele problemów, autor filmu krok po kroku pokazuje jak zacząć rysowanie bryły przestrzennej na kartce papieru, zwraca też uwagę na powszechne błędy i pokazuje jak ich unikać. Kolejny temat i film to „[Siatka i pole powierzchni ostrosłupa](#)”, w którym zobaczymy jak z kartki papieru zrobić bryłę, bardzo pomocną animacją jest rozcinięcie ostrosłupa i pokazanie jego siatki, dzięki temu uczniowie lepiej zrozumieją pojęcie pola powierzchni i przećwiczą je na prezentowanych zadaniach. Dzięki przejrzystym i kolorowym rysunkom w filmie pt. „[Ostrosłup prawidłowy trójkątny – obliczanie długości odcinków](#)” uczniowie udoskonalą swoją wizualizację przestrzenną i zastosują w szczegółowo omawianych zadaniach, następnie przejdziemy do zapoznania uczniów z odcinkami zawartymi w ostrosłupach prawidłowych czworokątnym i sześciokątnym w filmie pt. „[Ostrosłup prawidłowy czworokątny i sześciokątny – obliczanie długości odcinków](#)”, dzięki temu, że autor precyzyjnie tłumaczy i omawia różne zadania, wykonując przejrzyste rysunki i robiąc przekroje, sprawia, że każdy uczeń może zobaczyć, wyobrazić sobie i przeliczyć wszystkie rachunki, film pt. „[Ostrosłupy – zadania](#)” jest pewnego rodzaju podsumowaniem całego działu o ostrosłupach, uczniowie mogą sprawdzić na ile zrozumieli ten temat.



Wyjaśnijmy teraz pojęcie graniastosłupa korzystając z „[Co to jest graniastosłup? Co to jest graniastosłup prawidłowy?](#)”, zobaczmy teraz jakie odcinki mogą być zawarte w graniastosłupach „[Odcinki w graniastosłupach](#)”, następnie poznamy pojęcie objętości co ułatwi nam film pt. „[Objętość graniastosłupa](#)” ze względu na bardzo dopracowane wizualizacje w nim przedstawione, kolejny temat to „[Pole powierzchni graniastosłupa. Siatki graniastosłupów](#)” autor filmu bardzo elastycznie przechodzi w nim z przestrzeni na płaszczyznę, rozwiązywanie ciekawych zadań możemy obserwować w filmie pt. „[Graniastosłupy – zadania na pole powierzchni i objętość](#)”, jeśli chcemy prześledzić zadania z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa to polecamy film pt. „[Twierdzenie Pitagorasa w graniastosłupach](#)”.

Nauczyciel w każdym momencie może zatrzymać film i dopytać uczniów o dowolny fragment aby upewnić się, że wszystko jest zrozumiałe. Proponujemy aby nauczyciel zatrzymywał film przed rozwiązaniem zadania podanego w filmach aby każdy z uczniów mógł samodzielnie je rozwiązać lub razem z innymi uczniami, warto też zastosować metodę „burza mózgów”. Dzięki transkrypcji w filmach uczniowie niedosłyszający będą w pełni korzystać z takich lekcji. Przejrzyste rysunki, wizualizacje i animacje stosowane podczas oglądania filmów sprawiają, że uczniowie nawet z ubogą wyobraźnią przestrzenną będą mogli zrozumieć i zobaczyć różne własności brył i odcinków w nich zawartych. Filmy mogą być również odtwarzane przez uczniów w domach aby powtórzyć i utrwalić nowo poznane pojęcia i wzory.

Każdy nauczyciel powinien najpierw porozmawiać z uczniami o zadaniach a później dopiero napisać rozwiązanie na tablicy, pamiętajmy przy tym o komentowaniu tego co piszemy. Jeśli to możliwe to pokażmy, różne metody rozwiązań, pokażmy jak sprawdzić czy rozwiązanie jest poprawne. Bardzo ważna jest współpraca z rodzicami, którzy powinni ucznia motywować do systematycznej pracy, nauczyciel powinien skupić się raczej na pochwałach (jeśli tylko jest taka możliwość).



4. Przestrzeń

Przestrzeń jest czymś nieszablonowym i interesującym, człowiek posiada zdolność do wyobrażania sobie nie tylko tego co aktualnie spostrzega, ale może przedstawić sobie w wyobraźni każdą rzecz o której pomyśli, jest to możliwe dzięki spostrzeżeniom i doświadczeniom, a zajęcia szkolne (lekcje geometrii) sprzyjają kształtowaniu myślenia przestrzennego [Sulima]. Uczniowie przedstawiają ją na własny sposób w zależności od wieku, umiejętności spostrzegania i rozumienia jej, obserwacja i wyrażenie przestrzeni wymagają od ucznia dużego wysiłku, stopniowo poznają wiadomości dotyczące sposobów przedstawiania brył, przedmiotów trójwymiarowych i ich usytuowanie w przestrzeni [ibidem].

Z przestrzenią dzieci zapoznają się już od najmłodszych lat, wtedy, gdy najpierw poznają kształty przedmiotów, a następnie uczą się nimi manipulować, począwszy od edukacji wczesnoszkolnej, a nawet przedszkolnej dziecko korzysta z umiejętności "posługiwania się przestrzenią", dzieje się to podczas budowania z klocków, układania puzzli, lepienia z plasteliny, formowania brył, malowania, wyklejania itp., a także podczas zabaw i zajęć, gdy uczą się rozpoznawać kierunki w przestrzeni, porównywać wielkości [ibidem]. Mając to na uwadze i wiedząc, że wyobraźnia przestrzenna jest zdolnością, którą można rozwijać, należy to czynić w sposób świadomy i zaplanowany [ibidem]. Rozwój wyobraźni przestrzennej w nauczaniu geometrii polega na [ibidem]:

- stosowaniu odpowiednio dobranego materiału obserwacyjnego (naturalne otoczenie, modele, rysunki);
- stosowaniu modeli pokazowych i modeli roboczych, z którymi uczniowie pracują, stosowaniu modeli trwałych i modeli budowanych oraz rozkładanych przez uczniów, modeli statycznych i modeli ruchomych;



- stałym rozszerzaniu wiedzy ucznia (istotne twierdzenia i określenia oraz korzystanie z nich), która utrwała obraz powstały w wyobraźni;
- jednoczesnym kształceniu wyobraźni i logicznego myślenia;
- rozwiązywaniu zadań, kształcących wyobraźnię czynną, tj. zdolność świadomego, kierowanego wolą kombinowania obrazów konfiguracji geometrycznych z różnych elementów wyobraźniowych;
- związanego z logicznym myśleniem (zadania takie, jak konstrukcje prostych przekrojów, rozkładanie brył na części, poszukiwanie liczby przekątnych, płaszczyzn przekątnych, osi obrotu i płaszczyzn obrotu);
- wykorzystaniu anaglifów, jest to obrazów, które oglądane są przez specjalne okulary (czerwono-niebieskie, czerwono-zielone bądź czerwono-turkusowe) dają wrażenie oglądania obiektu trójwymiarowego.

Jeśli zauważamy, że uczeń ma problemy z wyobraźnią przestrzenną zacznijmy od podstaw czyli od kształtowania świadomości własnego ciała, różnicowania prawej i lewej strony, prawidłowego określania położenia przedmiotów. Pomogą w tym następujące ćwiczenia, które możemy zadać jako pracę domową lub jako ćwiczenie do wykonania z rodzicami, co wzmocni nie tylko więzi rodzinne ale będzie też sympatyczną zabawą rozwijającą myślenie przestrzenne, które będzie miało duży wpływ na rozwój ucznia i na efekty uczenia się nie tylko matematyki.

Ćwiczenie 1.

Nauczyciel/rodzic prosi kolejno uczniów o podniesienie do góry/ do boku/ przed siebie/ za siebie prawej/ lewej ręki, prawej/ lewej nogi. Następnie prosi o wskazanie części ciała: głowy, brzucha, pleców.



Ćwiczenie 2.

Uczniowie dobierają się w pary i stają naprzeciwko siebie. Jeden z uczniów podaje polecenia a drugi je wykonuje, później następuje zamiana ról.

Przykładowe polecenia: porusz oczami, porusz buzią, głową, lewą/prawą ręką, dotknij mojego brzucha/lewej, prawej nogi/pleców, dotknij swojego brzucha/lewej, prawej nogi/pleców.

Ćwiczenie 3.

Jeden z uczniów będzie wykonywał polecenia innych uczniów, po czym nastąpi zmiana ucznia wykonującego polecenia. Przykładowe polecenia do wykonania to: usiądź na ławce, stań po prawej stronie krzesła, stań za krzesłem, podnieś piłkę do góry, postaw piłkę na podłodze, podnieś piłkę z podłogi, rzuć piłkę do mnie, rzuć piłkę do osoby po twojej lewej stronie itp.

Ćwiczenie 4.

Zgromadzimy różne przedmioty z sali i rozłożymy je w różnych miejscach tej sali zgodnie z instrukcjami nauczyciela, np. jabłko na ławce, piłkę pod biurkiem, klocek na najbliższym krześle po twojej prawej stronie, zegarek obok najdalszego plecaka po twojej lewej stronie.

Ćwiczenie 5.

Uczniowie odpowiadają na pytanie, gdzie są umieszczone poszczególne przedmioty np. książka jest na parapecie po prawej stronie nauczyciela, itp.

Ćwiczenie 6. [Zubowicz]

Zadaniem ucznia jest ułożenie klocków wg poleceń, np. połóż pomarańczowy klocek przed sobą, z prawej strony żółtego klocka połóż zielony klocek.

Na zielonym klocku połóż czerwony klocek, itd.,



Ćwiczenie 7. [ibidem]

Uczeń/uczniowie biegają po pokoju. Na sygnał prowadzącego zabawę, ustawiają się i wykonują zadania wg jego instrukcji, np. stań/stańcie obok okna, przykucnij/przykucnijcie pod ławką, zatrzymaj się/zatrzymajcie się przed drzwiami,

Ćwiczenie 8. [ibidem]

Dorosły stoi obok ucznia i wydaje polecenia: „idź dwa kroki w prawo, a teraz trzy kroki do przodu, dwa kroki do tyłu, pięć kroków w lewo, ...”.

Ciekawy jest scenariusz lekcji pt. „[Budujemy osiedle](#)”, którego autorką jest Zofia Muzyczka. Głównym celem lekcji jest rozwijanie wyobraźni przestrzennej. Cele szczegółowe, które podaje autorka, to uczeń:

- projektuje konstrukcje przestrzenne;
- konstruuje „budowle” zgodnie z projektem;
- zauważa sytuacje, w których niezbędna jest umiejętność projektowania 3D;
- wyciąga wnioski dotyczące rzutów brył;
- zauważa zmiany w swojej dotychczasowej wiedzy i porównuje ją z poprzednią.

Autorka proponuje aby w trakcie zajęć nauczyciel zwracał uwagę na dobór dzieci w zespołach, tak aby uczniowie tworzyli zróżnicowane pod względem możliwości grupy (dwoje uczniów o mniejszych możliwościach edukacyjnych nie powinno być razem w grupie), należałoby też uwzględnić (przygotować) dodatkowe zadania dla uczniów o większych możliwościach edukacyjnych. Jeżeli w klasie znajduje się dziecko (dzieci) z niepełnosprawnością, należy przygotować dodatkowe środki dydaktyczne uwzględniające daną niepełnosprawność dziecka. Dzieci z niższymi możliwościami edukacyjnymi mogą mieć na początku trudność z odwzorowaniem budowli z rzutów. Przy odtwarzaniu budowli na podstawie



trzech rzutów mogą wystąpić trudności np. u uczniów z zaburzoną lateralizacją. Dużym ułatwieniem jest uzupełnienie rysunków poprzez zaznaczenie wewnątrz obrysu linii oddzielających klocki. Autorka proponuje również korzystanie z programów 3D, które pomogą dzieciom rozwinąć wyobraźnię.

Inne scenariusze tej samej autorki, które również polecamy są następujące: „[Prostopadłościan](#)” oraz „[Mój prostopadłościan](#)”.



5. Pole powierzchni

Wiele zapisów podstawy programowej podkreśla konieczność kształtowania umiejętności właściwego rozumienia pojęć na przykład zapisy „uczeń rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy – w tym proste i prawidłowe” czy „oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe” należy rozumieć jako wskazanie, że pojęcia graniastosłupów i ostrosłupów muszą być wprowadzane z wykorzystaniem różnorodnych przykładów, w szczególności wyobrażenie o tych bryłach musi obejmować nie tylko przypadki brył prostych czy brył prawidłowych [Daniel, i inn., 2018, str. 59].

Polecamy scenariusz pt. „[Obliczanie pól powierzchni i objętości ostrosłupów](#)”, w którym wykorzystujemy program GeoGebra, którego autorką jest Zofia Muzyczka. Cele szczegółowe takiej lekcji, to uczeń:

- rozpoznaje ostrosłupy i ostrosłupy prawidłowe;
- potrafi sporządzać rysunki ostrosłupów i potrzebnych przekrojów;
- zna wzory na pole powierzchni i objętość ostrosłupa;
- oblicza pola powierzchni i objętości ostrosłupów;
- umie odszukać i wykorzystywać dostępne informacje;
- zauważa sytuacje, w których przydatna jest umiejętność obliczania powierzchni i objętości brył;
- zauważa zmiany w swojej dotychczasowej wiedzy i porównuje ją z poprzednią;
- wykorzystuje technologie informacyjno-komunikacyjne do praktycznych zastosowań.

Cele wychowawcze, które podaje autorka w scenariuszu są następujące:

- wdrażanie do uważnej i krytycznej analizy;
- wdrażanie do poszukiwania informacji w dostępnych źródłach;



- wdrażanie do precyzyjnego odczytywania informacji;
- wdrażanie do rzetelności w działaniach;
- wdrażanie do konstruktywnej współpracy, w tym efektywnego podziału ról;
- kształtowanie poczucia odpowiedzialności za wyniki pracy zespołu;
- wdrażanie do poszanowania praw autorskich;
- rozwijanie umiejętności współpracy w zespole;
- rozwijanie aktywności poznawczej uczniów z uwzględnieniem ich indywidualnych potrzeb;
- rozwijanie odpowiedzialności za własne uczenie się;
- angażowanie uczniów w doświadczenia;
- angażowanie uczniów w praktyczne wykorzystanie wiedzy teoretycznej.

Autorka wspomina aby nauczyciel w trakcie zajęć zwracał uwagę na dobór dzieci w zespołach, tak aby uczniowie tworzyli zróżnicowane pod względem możliwości pary (dwoje uczniów o mniejszych możliwościach edukacyjnych nie powinno być razem w parze), należy również uwzględnić (przygotować) dodatkowe zadania dla uczniów o większych możliwościach edukacyjnych. Jeżeli w klasie znajduje się dziecko (dzieci) z niepełnosprawnością, należy przygotować dodatkowe środki dydaktyczne uwzględniające daną niepełnosprawność dziecka.

Warto porozmawiać z uczniami o praktycznym zastosowaniu obliczeń powierzchni i objętości brył – np. ilość farby potrzebna do pomalowania domu czy pokoju, liczba m^2 płytek do położenia na podłodze, liczba grzejników potrzebnych do ogrzania danej kubatury pomieszczenia itp.

Zadanie 1.

Prostokątny stół o wymiarach 3 m na 2 m można rozłożyć, tak aby przy dwóch krótszych bokach dodać półkola. Oblicz przybliżoną powierzchnię stołu.

Przyjmij w obliczeniach $\pi = 3,14$.



Zadanie 2.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 45 m^2 a pole boczne jest równe 36 m^2 . Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość ściany bocznej.

Zadanie 3.

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 9 cm a wysokość 7 cm . Oblicz pole powierzchni i objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 4.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają tę samą długość równą 13 . Ile wynosi pole powierzchni tego ostrosłupa ?

Zadanie 5.

Oblicz pole powierzchni sześcianu o przekątnej $8\sqrt{3}$.

Zadanie 6.

Oblicz wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy równej 3 cm , jeżeli jego pole powierzchni bocznej jest równe 144 cm^2 .

Zadanie 7.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa mającego w podstawie romb jest równe $2,08 \text{ dm}^2$. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeżeli bok rombu ma 5 dm , a przekątne rombu mają długość 8 dm i 6 dm .



6. Objętość

Zadanie 1.

Ile wynosi objętość prostopadłościanu o wysokości 2 dm, szerokości 6 cm i długości 12 mm ?

Zadanie 2.

Oblicz objętość prostopadłościanu, którego przekątna ma długość $\sqrt{78}$ cm a wysokość ma długość 7 cm, natomiast jeden z boków ma długość 2 cm.

Zadanie 3.

Objętość prostopadłościanu wynosi 70 cm^3 , jego wysokość ma długość 7 cm a jeden z boków podstawy ma długość 5 cm, oblicz drugi bok podstawy tego prostopadłościanu.

Zadanie 4.

Jaką wysokość powinien mieć ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości 6 m, aby miał tę samą objętość co ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości 9 m i wysokości 12 m ?

Zadanie 5.

Jak zwiększy się objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, gdy jego wysokość zwiększymy 8 razy a krawędź podstawy zmniejszymy 2 razy ?

Zadanie 6.

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości $2\sqrt{7}$ dm i krawędzi bocznej długości $8\sqrt{7}$ dm.

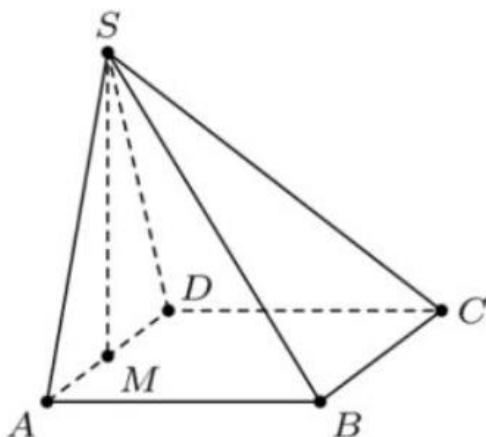


Zadanie 7.

Oblicz wysokość i objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 8 dm i krawędzi bocznej 12 dm.

Zadanie 8. [Daniel, i inn., 2018, str. 59]

Prostokąt ABCD jest podstawą ostrosłupa ABCDS, punkt M jest środkiem krawędzi ADS, odcinek MS jest wysokością ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi: $|AD| = 10$ cm, $|AS| = 13$ cm oraz $|AB| = 20$ cm. Oblicz objętość ostrosłupa.



Rysunek 1. Ostrosłup o podstawie prostokąta ABCD,
Źródło: opracowanie własne na podstawie: Daniel, J., Rzepecka, E., Warzecha, E., Zawada, A., (2018), Vademecum nauczyciela, egzamin ósmoklasisty, matematyka, Warszawa, Ośrodek Rozwoju Edukacji, s. 59

W zadaniu rozważany jest ostrosłup, który nie jest prawidłowy. Rozwiązanie będzie składać się z kilku etapów. Po rozwiązaniu zadania warto poprosić uczniów o ich wskazanie. Następnie można wspólnie ustalić, od których czynności można rozpocząć rozwiązywanie zadania. Ważne jest uświadomienie uczniom, że niektóre kroki wymagają zamieszczenia komentarza. Kolejnym punktem prowadzonej z uczniami analizy może być ustawienie czynności potrzebnych do realizacji rozwiązania w sekwencję następujących po sobie kroków. Przedstawiona tu sytuacja dydaktyczna może pomóc uczniom w doskonaleniu umiejętności planowania działania, a ponadto może przekonać



ich do tego, by do rozwiązania dobrać taką strategię, która w pierwszej kolejności pozwala wykorzystać umiejętności opanowane najlepiej. Przykładowe efekty pracy z uczniami w omawianym przykładzie mogą wyglądać tak; aby rozwiązać zadanie należy:

- ustalić długość odcinka AM;
- ustalić, że trójkąt AMS jest prostokątny;
- zastosować twierdzenie Pitagorasa w trójkącie AMS;
- obliczyć wysokość ostrosłupa;
- obliczyć pole podstawy ostrosłupa;
- ustalić sposób obliczenia objętości ostrosłupa;
- obliczyć objętość ostrosłupa.

Czynności, takie jak: ustalanie długości odcinka AM, obliczanie pola podstawy ostrosłupa, ustalanie sposobu obliczenia objętości ostrosłupa mogą być wykonane w pierwszej kolejności. Możemy też na początku ustalić, że trójkąt AMS jest prostokątny, ale wymaga to stosownego komentarza.

Podstawa programowa z matematyki dla szkoły podstawowej podkreśla znaczenie kształtowania umiejętności matematycznych, które mają ułatwić funkcjonowanie w konkretnych sytuacjach życiowych, wymagających rozwiązywania typowych i nietypowych problemów, w szczególności ważne są umiejętności podejmowania właściwych decyzji, organizacji własnych działań czy precyzyjnego porozumiewania się [ibidem]. W komentarzu do podstawy programowej wskazano wśród celów ogólnych wyrobienie u uczniów intuicji matematycznych i zdolności analitycznych oraz myślenia strategicznego [ibidem]. Jak zatem zachęcić uczniów, by podejmowali działanie w sytuacji, kiedy nie dostrzegają oni podobieństwa do sytuacji już znanych lub nie potrafią dobrać strategii postępowania [ibidem] ?



Przy rozwiązywaniu zadań matematycznych warto zaproponować ilustrowanie treści zadania i to nie tylko w przypadku zagadnień geometrycznych, ale także wtedy, gdy zrozumienie rozważanej sytuacji lub poszukiwanie sposobu rozwiązania staje się wyzwaniem, w przypadku zadań geometrycznych rysunek jest często częścią rozwiązania lub wręcz istotą pomysłu na znalezienie odpowiedzi [ibidem].



7. Obliczenia praktyczne

Ciekawy scenariusz lekcji, którego autorką jest Zofia Muzyczka znajduje się na stronie „[Chodzenie po sześcianie](#)”. Cele szczegółowe takiej lekcji według autorki, to uczeń:

- poznaje siatki sześcianu;
- stosuje znaną wiedzę do rozwiązania nieznanych zadań;
- rozwija wyobraźnię;
- przewiduje wynik działań przed ich zrealizowaniem;
- dokonuje praktycznej weryfikacji formułowanych hipotez;
- uzasadnia rozwiązanie;
- zauważa sytuacje, w których przydatna jest umiejętność myślenia przestrzennego;
- wyciąga wnioski dotyczące wykorzystania siatek brył;
- zauważa zmiany w swojej dotychczasowej wiedzy i porównuje ją z poprzednią.

Cele wychowawcze:

- wdrażanie do staranności podczas wykonywania zadań;
- kształtowanie nawyku precyzyjnego formułowania wypowiedzi;
- przyzwyczajanie do uzasadniania sądów;
- rozwijanie umiejętności współpracy w zespole;
- rozwijanie aktywności poznawczej uczniów z uwzględnieniem ich indywidualnych potrzeb;
- rozwijanie odpowiedzialności za własne uczenie się;
- angażowanie uczniów w rozwijanie umiejętności przestrzennego i logicznego myślenia;
- angażowanie uczniów w praktyczne wykorzystanie wiedzy teoretycznej.



Kolejnym scenariuszem, którego autorką jest Zofia Muzyczka, który polecamy pt. znajduje się na stronie „[Pitagoras w przestrzeni](#)”. Ciekawy jest również scenariusz tej samej autorki pt. „[Pakujemy prezenty](#)”. Cel główny takiej lekcji, to projektowanie siatek i wykonanie modelu w konkretnej sytuacji praktycznej. Autorka wskazuje również cele szczegółowe – uczeń:

- zna pojęcie siatki;
- rozwija wyobraźnię;
- dokonuje pomiarów potrzebnych do wykonania projektu;
- projektuje siatkę wielościanu;
- doskonali umiejętność wnikliwej obserwacji;
- potrafi planować działania;
- przewiduje skutki swoich działań;
- zauważa sytuacje, w których przydatna jest umiejętność projektowania siatek brył;
- wyciąga wnioski dotyczące wykonania modelu;
- wykorzystuje TIK (Technologie informacyjno-komunikacyjne) do praktycznych zastosowań.

Metody prowadzenia lekcji, które proponuje autorka scenariusza to: dyskusja i metoda ćwiczeń praktycznych. Komentarz metodyczny autorki jest następujący: „Dowolność wyboru tak zawartości opakowania, jak i jego kształtu, skłania uczniów do mimowolnego współzawodnictwa, co znacząco wpływa na chęć jak najlepszego wywiązania się z zadania, warto lekcję skoordynować projektem z zajęciami informatyki i techniki, gdzie uczniowie mogą samodzielnie zaprojektować i wykonać ozdoby na pudełko”.

Następny scenariusz na który chcemy zwrócić uwagę autorstwa Zofii Muzyczki, to „[Rozkładanie i składanie](#)”. Cel główny takiej lekcji, to kształcenie wyobraźni przestrzennej i rozpoznawanie siatek brył. Natomiast cele szczegółowe podane przez autorkę, to uczeń:



- ocenia, czy dana figura jest siatką prostopadłościanu lub ostrosłupa;
- składa prostopadłościany z gotowych siatek;
- przed złożeniem modelu przewiduje położenie ścian zbudowanej bryły;
- rysuje siatkę graniastostłupa/sześcianu;
- zauważa sytuacje, w których przydatna jest wyobraźnia przestrzenna;
- wyciąga wnioski dotyczące siatek brył;
- zauważa zmiany w swojej dotychczasowej wiedzy i porównuje ją z poprzednią;
- wykorzystuje TIK (technologie informacyjno-komunikacyjne) do praktycznych zastosowań.

Komentarz metodyczny autorki jest następujący: „W trakcie zajęć nauczyciel zwraca uwagę na dobór dzieci w zespołach, tak aby uczniowie tworzyli zróżnicowane pod względem możliwości pary (dwoje uczniów o mniejszych możliwościach edukacyjnych nie powinno być razem w parze). Należy uwzględnić (przygotować) dodatkowe zadania dla uczniów o większych możliwościach edukacyjnych. Jeżeli w klasie znajduje się dziecko (dzieci) z niepełnosprawnością, należy przygotować dodatkowe środki dydaktyczne uwzględniające daną niepełnosprawność dziecka. Warto lekcję skoordynować z zajęciami informatyki lub na lekcji matematyki wejść na jedną ze stron z bryłami i ich siatkami (np. www.matematyka.wroc.pl/book/rozmaitości/galeria_modeli), gdzie uczniowie mogą zobaczyć różnorodność brył”.

Zadanie 1.

Pole powierzchni całkowitej piramidy jest równe $450\,000\text{ cm}^2$ a pole boczne jest równe 36 m^2 . Oblicz długość krawędzi podstawy piramidy i wysokość ściany bocznej.

Zadanie 2.

Oblicz wysokość czworościanu foremnego o krawędzi długości 15 cm .



Zadanie 3.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 145 cm^2 . Jeżeli krawędź jego podstawy ma $0,5 \text{ dm}$, to ile wynosi pole jednej ściany bocznej ?

Zadanie 4.

Ile kwadratowych płytek o boku 2 dm potrzeba do wyłożenia podłogi w kształcie prostokąta o szerokości 4 m i długości 6 m . Ile opakowań takich płytek trzeba kupić jeśli w jednym opakowaniu mieszczą się 24 płytki.

Zadanie 5.

Jakiej największej średnicy stół przykryje prostokątny obrus o polu $112,5 \text{ cm}^2$, jeśli wiemy, że jeden bok jest dwa razy większy od drugiego ?

Zadanie 6.

Wazon na kwiaty ma kształt graniastosłupa prostego o podstawie sześciokąta. Ile litrów wody zmieści się w ten wazon jeśli podstawa sześciokąta ma długość $2\sqrt[4]{3} \text{ dm}$ a wysokość wynosi 40 cm .

Zadanie 7.

Wazonik ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole podstawy wynosi 144 cm^2 , a wysokość ściany bocznej wynosi $\sqrt{205} \text{ cm}$. Oblicz pojemność tego wazonika. Wynik podaj w litrach i mililitrach.



8. Układanie i rozwiązywanie zadań z treścią

Aby opanować umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, trzeba znać i rozumieć ich strukturę, nauczyć się tego można, układając zadania na stronie internetowej [układanie zadań przez uczniów](#). Umiejętność tę, uczniowie powinni zdobywać równoległe z poznawaniem sztuki rozwiązywania zadań. W edukacji umiejętność układania zadań można kształtować na wiele sposobów [ibidem]. Omówimy je na przykładach.

W pierwszej kolejności należy zwrócić uwagę na układanie zadań analogicznych do zadań rozwiązywanych, niezbędne są dobre wzorce zadań o poprawnej strukturze oddające charakter poznawanego typu zadań i określonych zależności matematycznych, analogie mogą dotyczyć:

- 1) danych liczbowych i działań prowadzących do rozwiązania;
- 2) danych liczbowych;
- 3) działań użytych do rozwiązania [ibidem].

Układanie zadań analogicznych do danych z wykorzystaniem tych samych liczb lub działań. Układanie zadań analogicznych do zadania, inaczej mówiąc, przekształcanie zadania, dotyczy zmiany treści zadania bez zmiany liczb i sposobu rozwiązania. Na przykład uczniowie rozwiązują na lekcji zadanie:

Oblicz objętość pudełka o wysokości 3 m, długości 5m i szerokości 9 m.

Podczas rozwiązywania zadania ustalono, że w zadaniu wykorzystamy wzór na objętość prostopadłościanu i aby odpowiedzieć na pytanie wykonamy następujące mnożenie $5m \cdot 9m \cdot 3m$.

W analogiczny sposób można rozwiązać wiele zadań. Uczeń powinien dobrze to zrozumieć, dlatego proponujemy ułożenie zadań z tymi samymi danymi – liczbami i o tym samym sposobie rozwiązania – działaniem $5m \cdot 9m \cdot 3m$.

Można, zwłaszcza w początkowej fazie kształtowania umiejętności,



podpowiedzieć uczniom tematykę, której mogą dotyczyć nowe zadania, np. ułóżcie zadanie z tymi samymi liczbami, które można rozwiązać w taki sam sposób, ale o innej treści [ibidem]. Mogą to być zadania: o akwarium itp.

Na przykład:

Oblicz objętość akwarium o wysokości 3 m, długości 5 m i szerokości 9 m, lub oblicz ile wody zmieści się w akwarium wysokości 3 m, długości 5 m i szerokości 9 m lub ile zboża zmieści się w kontener o wysokości 3 m, długości 5 m i szerokości 9 m.

Przy każdym zadaniu trzeba zwrócić uwagę na poszczególne etapy jego rozwiązania, najpierw przedyskutujmy je z uczniami a potem zapiszmy na tablicy oraz w zeszytach [ibidem].

Podobnie można układać nowe zadania, wykorzystując tylko liczby, np. porównując czego jest więcej lub mniej i o ile, bądź układając zadania z dowolnymi danymi i o dowolnej treści, ale takie, by można je było rozwiązać, korzystając z wcześniejszych rachunków np. Oblicz objętość prostopadłościanu o wysokości 2 cm, długości 8 cm i szerokości 5 cm.

Zadanie 1.

Ile kwadratowych płytek o boku 2 cm potrzeba do wyłożenia dna i wewnętrznych ścian basenu o długości 10 m, szerokości 8 m i głębokości 3 m ?

Zadanie 2.

Czy okrągła serweta o średnicy 2,5 m przykryje kwadratowy stół o boku 2m ?

Zadanie 3.

Lustro ma wymiary 90 cm x 95 cm. Czy można je przenieść przez okno o wymiarach 60 cm x 80 cm ?



Zadanie 4.

W jakiej odległości od ściany należy ustawić drabinę o długości 5 m aby sięgnęła do wysokości 4 m ?

Zadanie 5.

Jadzia chciałaby okleić sobie pudełeczko na zabawki folią imitującą ozdobną. Pudełko ma kształt prostopadłościanu o wysokości 14 cm, długości 10 cm, szerokości 18 cm. Ile folii będzie potrzebować Jadzia aby okleić całe pudełko, bez zakładek ?

Zadanie 6.

Jadzia chciałaby okleić sobie pudełeczko na zabawki folią imitującą ozdobną. Pudełko ma kształt prostopadłościanu o wysokości 14 cm, długości 10 cm, szerokości 18 cm. Ile folii będzie potrzebować Jadzia aby okleić całe pudełko, na zakładki trzeba doliczyć 5% potrzebnej folii ?

Zadanie 7.

Tomek chce zapakować prezent pod choinkę dla swojego brata ale nie kupił papieru ozdobnego. Chce sprawdzić ile papieru będzie potrzebował, jeśli pudełko ma kształt sześcianu o boku 6 cm i nie chce doliczać papieru na zakładki.

Zadanie 8.

Tomek chce zapakować prezent pod choinkę dla swojego brata ale nie kupił papieru ozdobnego. Chce sprawdzić ile papieru będzie potrzebował, jeśli pudełko ma kształt sześcianu o boku 6 cm i chce doliczyć 10% papieru na zakładki.



Zadanie 9.

Kasia chce pokazać Pawłowi jak wygląda piramida i w tym celu chce zrobić taki model z tektury. Ile tektury będzie potrzebowała jeśli w podstawie piramidy jest kwadrat o boku 4 cm a piramida ma mieć wysokość $2\sqrt{15}$ cm.

Zadanie 10.

Kasia chce pokazać Pawłowi jak wygląda piramida i w tym celu chce zrobić taki model z tektury. Ile tektury będzie potrzebowała jeśli w podstawie piramidy jest kwadrat o boku 4 cm a piramida ma mieć wysokość $2\sqrt{15}$ cmi trzeba doliczyć 12% na zrobienie zakładki aby model można było skleić.

Zadanie 11.

Rodzice zamówili 4 pufy na pokoju w kształcie sześciangu o przekątnej $40\sqrt{3}$. Ile tapicerki trzeba zamówić na obicie tych czterech puf ?

Interesujący jest scenariusz lekcji dla VIII klasy szkoły podstawowej pt. „[Pitagoras w przestrzeni](#)”, którego autorką jest Zofia Muzyczka. Celem głównym lekcji według autorki jest zastosowanie twierdzenia Pitagorasa w geometrii przestrzennej. Cele szczegółowe określa ona następująco – uczeń:

- stosuje twierdzenia Pitagorasa w obliczeniach;
- oblicza długości odcinków występujących w figurach przestrzennych, także niedostępnych dla pomiarów;
- rysuje potrzebne przekroje;
- na podstawie znanych faktów przeprowadza wnioskowania;
- uzasadnia sposób rozwiązania;
- zauważa sytuacje, w których przydatna jest wyobraźnia przestrzenna;
- wyciąga wnioski dotyczące stosowania geometrii przestrzennej;
- wykorzystuje TIK (technologie informacyjno-komunikacyjne) do rozwijania wyobraźni przestrzennej;



- formułuje uogólnienia.

W komentarzu metodycznym autorka zwraca uwagę, że:

- przy rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej bardzo istotne jest sporządzanie rysunku, który nie przedstawia przypadku szczególnego (czworokąt nie musi być kwadratem, trójkąt – trójkątem równobocznym, itp.);
- zadania z geometrii przestrzennej sprawiają kłopot wielu uczniom, dlatego propozycja zadań musi zawierać jedno zadanie elementarne. Sporządzanie odpowiedniego rysunku można (w razie trudności) wspomóc obejrzeniem filmów wykorzystywanych już na lekcjach (np. „Kroimy prostopadłościany i ostrosłupy”);
- jeżeli nauczyciel ma dostęp do pracowni komputerowej, można zaproponować uczniom zagranie w grę Blockout (jest to stara gra, jednak istnieją adaptacje – proponuje się wersję z klockami, które nie są przezroczyste, gdyż przezroczystość klocków na początku może bardziej przeszkadzać niż pomagać). Jest to gra, która znakomicie rozwija wyobraźnię przestrzenną;
- podczas zajęć nauczyciel zwraca uwagę na dobór dzieci w zespołach, tak aby uczniowie tworzyli zróżnicowane pod względem możliwości grupy (dwoje uczniów o mniejszych możliwościach edukacyjnych nie powinno być razem w zespole). Należy uwzględnić (przygotować) dodatkowe zadania dla uczniów o większych możliwościach edukacyjnych. Jeżeli w klasie znajduje się dziecko (dzieci) z niepełnosprawnością, należy przygotować dodatkowe środki dydaktyczne uwzględniające daną niepełnosprawność dziecka.

Kolejny ciekawy scenariusz lekcji dla klasy VIII szkoły podstawowej, to „[Bryły i ich przekroje](#)”, którego autorką jest Zofia Muzyczka. Jako cel główny takiej lekcji autorka podaje: zapoznanie z różnymi przekrojami wybranych brył. Natomiast cele szczegółowe określa w następujący sposób – uczeń:



- rozwija umiejętność wnikliwej obserwacji i wnioskowania;
- rozwija wyobraźnię;
- przewiduje wynik operacji przed jej wykonaniem;
- rozwiązuje zadania z danymi dotyczącymi przekrojów;
- sporządza rysunki;
- dostrzega związek między matematyką szkolną a doświadczeniami życia codziennego;
- zauważa sytuacje, w których przydatna jest umiejętność posługiwania się przekrojami brył;
- wykorzystuje TIK (technologie informacyjno-komunikacyjne);
- do rozwijania umiejętności matematycznych, formułuje uogólnienia.



PODSUMOWANIE

Publikacja i propozycje w niej zawarte są uniwersalne i odpowiednie dla uczniów na każdym poziomie rozwoju. Praca ta jest przejrzysta i czytelna co czyni ją niezwykle wszechstronną. Dzięki systematycznym ćwiczeniom, które rozwijają myślenie przestrzenne, matematyce multimedialnej, która wykorzystuje nowoczesne metody dydaktyczne połączonych z wykonywaniem przykładowych zadań podanym w tej publikacji uczeń udoskonali swoje umiejętności i wykorzysta w innych sytuacjach z życia codziennego lub w dorosłości. Takie innowacyjne ćwiczenia (podane zostały do nich również linki), rozwijają spostrzegawczości, koncentrację, oraz koordynację wzrokowo ruchową.

Pamiętajmy, że nie przygotowujemy ucznia tylko do opanowania nowego materiału, sprawdzianu czy egzaminu ósmoklasisty ale przygotowujemy ucznia do samodzielnego zdobywania wiedzy, do samodzielnego jej wykorzystania oraz przetwarzania, budowania strategii rozwiązywania problemu, to jest główny cel edukacji.

W publikacji możemy znaleźć gotowe scenariusze i konspekty lekcji co ułatwi pracę nauczycielom, podane zostały w nich koncepcje dydaktyczne wraz z propozycjami rozwiązań dydaktycznych. Podstawę teoretyczną wszystkich scenariuszy stanowi konstruktywistyczna teoria uczenia się. Jest wiele innowacyjnych rozwiązań dydaktycznych wraz z dokładnym opisem ich przebiegu, korzyściami jakie przyniosą w rozwoju kompetencji kluczowych i rozwijaniu celów wychowawczych. Innowacyjne są również proponowane zadania do wykorzystania podczas lekcji lub jako praca domowa. W całej publikacji jest też wiele odniesień do podstawy programowej.



BIBLIOGRAFIA

- [1.] Ayres, A., 2015. *Dziecko a integracja sensoryczna*. Gdańsk: Harmonia Universalis.
- [2.] Biel, L., 2015. *Integracja sensoryczna: skuteczne strategie w terapii dzieci i nastolatków*. Kraków: Uniwersytet Jagielloński.
- [3.] Borkowska, M., Wagh, K., 2014. *Integracja sensoryczna na co dzień*. Warszawa: Wydawnictwo Lekarskie PZWL.
- [4.] Charbicka, M., 2017. *Integracja sensoryczna przez cały rok*. Warszawa: Wyd. Difin SA.
- [5.] Daniel, J., Rzepecka, E., Warzecha, E., Zawada, A., 2018. *Vademecum nauczyciela, egzamin ósmoklasisty, matematyka*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.
- [6.] Falkiewicz, E., Maj, M., 2018. *Technologie informacyjne w nauczaniu geometrii w szkole podstawowej*. Rzeszów: Dydaktyka Informatyki 13.
- [7.] Falkowska, A., 2002. *Psychologia, t. 2, J. Strelau (red.)*. Gdańsk: GWP.
- [8.] Gładyszewska-Cylulko, J., 2011. *Arteterapia w pracy pedagoga: teoretyczne i praktyczne podstawy terapii przez sztukę*. Kraków: Impuls.
- [9.] Głodkowska, J., 2000. *Pomóżmy dziecku z upośledzeniem umysłowym doświadczać przestrzeni*. Warszawa: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej.
- [10.] Gruszczyk-Kolczyńska, E., 2018. *Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze*. Dostępny w: <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf> [dostęp 16.07.2021].
- [11.] Gruszczyk-Kolczyńska, E., 1992. *Dzieci ze specjalnymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*. Warszawa: WSiP.
- [12.] Jakubowski, K., 2015. *Wielostronna aktywizacja uczniów: przybory niekonwencjonalne -gazety, kredki*. Warszawa: Wychowanie Fizyczne i Zdrowotne.



- [13.] Jodzis, D., 2013. *Dysfunkcje integracji sensorycznej a sprawność językowa dzieci w młodszym wieku szkolnym*. Gdańsk : Harmonia Universalis.
- [14.] Koomar, J. i in., 2014. *Integracja sensoryczna: odpowiedzi na pytania zadawane przez nauczycieli: formularze, listy kontrolnej praktyczne narzędzia dla nauczycieli i rodziców*. Gdańsk: Harmonia Universalis.
- [15.] Kopeć, B., 1989. *Rozwój i kształtowanie wyobraźni przestrzennej uczniów szkoły podstawowej i liceum ogólnokształcącego, Zeszyty naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Bydgoszczy*. Bydgoszcz: Uniwersytet Śląski.
- [16.] Kułakowska, Z., Borkowska, M., Zychowicz, B., 2013. *Terapia psychomotoryczna dzieci metodą Procus i Block*. Warszawa: Wydawnictwo Lekarskie PZWL.
- [17.] Makiewicz, M., 2018. *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej)*. Dostępny w:
<https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf> [dostęp 16.07.2021].
- [18.] Odowska-Szlachcic, B., 2014. *Terapia integracji sensorycznej. Z. 1, Ćwiczenia usprawniające bazowe układy zmysłowe i korygujące zaburzenia planowania motorycznego*. Gdańsk: Harmonia.
- [19.] Odowska-Szlachcic, B., 2013. *Terapia integracji sensorycznej. Z. 2, Strategie terapeutyczne i ćwiczenia stymulujące układy : słuchowy, wzrokowy, węchu i smaku oraz terapia światłem i kolorami*. Gdańsk: Harmonia.
- [20.] Odowska-Szlachcic, B., Mierzejewska, B., 2013. *Wzrok i słuch -zmysły wiodące w aspekcie integracji sensorycznej*. Gdańsk: Harmonia Universalis.
- [21.] Pająk, M., Konstantynowicz, A., 2019. *Tak, zdam ! Egzamin ósmoklasisty*. Gdynia: Wydawnictwo Pedagogiczne Operon.
- [22.] Pfeiffer, A., 2017. *Konstrukttywizm i metody aktywizujące w edukacji matematycznej dzieci starszych i młodzieży*. Warszawa: Wyd. ORE.



- [23.] Poleszak, W., Porzak, R., Kata, G., Kopik, A., 2014. *Diagnoza i wspomaganie w rozwoju dzieci uzdolnionych. Test Uzdolnień Wielorakich i materiały dydaktyczne*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.
- [24.] Skura, M., Lisicki, M., 2008. *Przepis na sukces pedagogiczny*. Warszawa: Wychowanie w Przedszkolu nr5.
- [25.] Skura, M., Lisicki, M., 2015. *Metody i zasady wprowadzania pojęć matematycznych. Przygotowanie do rozumienia liczb i posługiwania się nimi*. Warszawa: Wyd. ORE.
- [26.] Skura, M., Lisicki, M., 2014. *Myślenie matematyczne t. 1*. Warszawa: Wyd. Dr Josef Raabe Spółka Wydawnicza sp. Zoo.
- [27.] Stańdo, J., Szałwska-Murmyło, M., 2017. *Jak rozwijać wyobraźnię przestrzenną u najmłodszych ?*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.
- [28.] Turczyn-Iskrzak, E., 2008. *Różne aspekty orientacji przestrzennej, w: Zrozumieć żeby pomóc. Dysleksja w ujęciu interdyscyplinarnym*. Gdynia: Wyd. Operon.



NETOGRAFIA

- [1.] Guzy, A., 2011. *Kompetencja językowa uczniów a wyobraźnia i orientacja przestrzenna* [online]. Dostępny w:
<https://www.sbc.org.pl/Content/100681/doktorat3132.pdf>
[Dostęp 22.07.2021].
- [2.] *Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła podstawowa matematyka*. Dostępny w <https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2017/05/matematyka.-pp-z-komentarzem.-szkola-podstawowa-1.pdf> [Dostęp: 18.08.2021].
- [3.] Sulima, A. *Rola wyobraźni przestrzennej w kształtowaniu pojęć geometrycznych* [online]. Dostępny w: <http://sp4.grajewo.com/wp-content/uploads/2018/07/alicja-sulima.pdf> [Dostęp 21.07.2021].
- [4.] Świercz, J., 2021. *Egzamin ósmoklasisty. Jak skutecznie przygotować ucznia?* [online]. Dostępny w: <https://czasopismomatematyka.pl/artukul/egzamin-osmoklasisty-jak-skutecznie-przygotowac-ucznia> [Dostęp: 16.07.2021].
- [5.] Tyczyńska, M. *Ćwiczenia wspomagające integrację sensoryczną* [online]. Dostępny w: <http://dziecisawazne.pl/cwiczenia-wspomagajace-integracje-sensoryczna/> [Dostęp: 08.07.2021].
- [6.] Wiśniewska, M. *Co to jest integracja sensoryczna (SI)* [online]. Dostępny w: http://www.pstis.pl/pl/html/index.php?v2=block&str=podstrona_terapia [Dostęp: 08.07.2021].
- [7.] Wiśniewska, M. *Objawy zaburzeń (dysfunkcji) integracji sensorycznej* [online]. Dostępny w:
http://www.pstis.pl/pl/html/index.php?v2=block&str=podstrona_objawy
[Dostęp: 08.07.2021].
- [8.] Załęska, A. *Ćwiczenia rozwijające orientację przestrzenną* [online]. Dostępny w: <http://poradnia-gorlice.pl/wskazowki-do-pracy/cwiczenia-rozwijajace-orientacje-przestrzenna/> [Dostęp 21.07.2021].



- [9.] Zawistowska, J. *Przykłady ćwiczeń integracji sensorycznej do wykonywania w domu* [online]. Dostępny w: <http://www.leksja.pl/baza-wiedzy/cwiczenia-integracji-sensorycznej.html> [Dostęp: 08.07.2021].
- [10.] Zubowicz, E. *Rozwijanie orientacji przestrzennej* [online]. Dostępny w: <https://sp1kowary.edupage.org/text/?text=text/text27&subpage=5> [Dostęp 21.07.2021].
- [11.] Zynek, A. *Orientuj się – o wpływie zaburzonej orientacji przestrzennej na naukę szkolną* [online]. Dostępny w: <http://pppkozienice.pl/wp-content/uploads/2013/09/Orientuj-si%C4%99-%E2%80%93-o-wp%C5%82ywie-zaburzonej-orientacji-przestrzennej-na-nauk%C4%99-szkoln%C4%85.pdf>, [Dostęp: 10.07.2021].



SPIS ILUSTRACJI

Rysunek 1 Ostrosłup o podstawie prostokąta ABCD	32
---	----